Thibault Liétard
2023-2024
IS3

Chapitre 1 : Nombres complexes
Cours de Remédiation Mathématiques

---

1 Introduction

1.1 Contexte

Tout nombre réel positif admet une racine, également réelle et positive. Par exemple, 9 admet pour racine 3 car $3^2 = 9$; mais qu'en est-il des nombres réels négatifs ?

On peut se poser la question de l'existence d'une racine pour n'importe quel nombre réel négatif, mais cela revient en fait à se poser la question suivante : l'équation $x^2 + 1 = 0$ a t-elle une solution ? Pour le dire autrement, existe t-il un nombre tel que son carré soit égal à -1 ? -1 a t-il une racine ?

La réponse est oui, mais pas dans $\mathbb{R}$. On définit le nombre *imaginaire* i tel que $i^2 = -1$. Ainsi, l'équation $x^2 + 1 = 0$ est simplement un polynôme qui admet deux racines : i et $-i$.

Les nombres complexes ont été introduit au XVIème siècle par des mathématiciens italiens (notamment Cardan), afin de rendre possible et efficace la résolution de nombreux problèmes algébriques et géométriques. Ils sont une extension de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

1.2 Notations mathématiques

Pour aborder ce chapitre, il est nécessaire de faire quelques rappels mathématiques :
- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs
- l'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$
- l'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

On utilisera ensuite les notations suivantes dans les équations :

$\forall$	pour tout
$\exists$	il existe
$\exists!$	il existe un unique
$\in$	appartient
$\notin$	n'appartient pas
$\mid$	tel que

2 Définitions et représentations

2.1 Écritures pour un nombre complexe

On a noté $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, c'est à dire que l'ensemble des réels est un sous ensemble de l'ensemble des complexes. On a trois façon d'écrire les nombres complexes :

— L'écriture algébrique

— l'écriture trigonométrique

— la forme exponentielle.

La *forme algébrique* est la plus courante. Soit z un nombre complexe, il existe deux réels x et y tels que $z = x + iy$. On pourrait également écrire $\forall z \in \mathbb{C}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / z = x + iy$.

On appelle alors x la partie réelle de z et y sa partie imaginaire.

$$Re(z) = x$$

$$Im(z) = y$$

Cela revient à dire que $\mathbb{C}$ est une extensions en deux dimensions de $\mathbb{R}$, où l'axe des abscisses représente la partie réelle et l'axe des ordonnées la partie imaginaire, comme représenté sur le graphique 1.

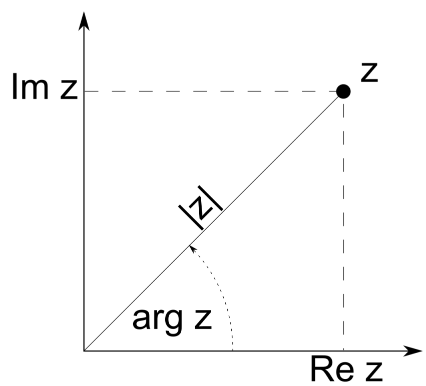

FIGURE 1 – Réprésentation d'un complexe sur un plan (source : Wikipédia)

On voit que, puisque z est un point du plan complexe, on peut également définir sa position dans le plan avec le vecteur formé par l'origine du repère et le point z. On appelle r la norme de ce vecteur et θ l'angle qu'il forme avec l'axe des abscisses. On peut alors écrire z en *écriture trigonométrique* avec $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

Dans le cas de l'écriture trigonométrique, r est appelé le *module* de z, qu'on note également $|z|$, et θ est appelé l'*argument* de z.

On fait facilement le lien entre les deux écritures : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. À l'inverse, le théorème de Pythagore nous donne $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Enfin, la forme exponentielle d'un nombre complexe s'écrit $z = re^{i\theta}$, où r et θ sont définis comme précédemment. Cette notation vient de la formule d'Euler et permet au passage de bien montrer facilement qu'en définissant ainsi les complexes, on a bien $i^2 = -1$.

2.2 Propriétés

2.2.1 Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient z_1, z_2, z_3 des nombres complexes. Soient x_i et y_i les parties réelles et imaginaires de z_i telles que $z_i = x_i + iy_i$. On a pour l'addition les propriétés suivantes :

- $\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2)$
- $\Im(z_1 + z_2) = \Im(z_1) + \Im(z_2)$

On a pour la multiplication de deux complexes :

- $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

On pose également les propriétés de linéarité suivantes :

- $\Re(\alpha z_1) = \alpha \Re(z_1)$
- $\Im(\alpha z_1) = \alpha \Im(z_1)$

2.2.2 Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe se note $\overline{z}$. Si $z = x + iy$, alors $\overline{z} = x - iy$.

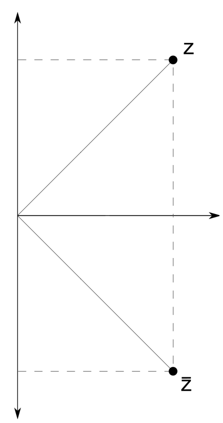

Figure 2 – Conjugué d'un nombre complexe

On peut alors définir l'ensemble des propriétés suivantes :

$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

$$\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

De plus, on aura :

$$\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

2.2.3 Égalité

Soient deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. On a l'équivalence suivante :

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2$$

En écriture géométrique ou exponentielle, on aura de même :

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \ , \ \theta_1 = \theta_2$$

3 Propriétés des éléments complexes

Dans cette dernière partie nous allons donner quelques propriétés qu'il est important de connaître sur les complexes. Les preuves ne sont pas données, mais démontrer ces propriétés est un bon exercice d'entraînement.

3.1 Propriétés du module

$$|z| = |-z| = |\overline{z}|$$
$$|z| = 0 \iff z = 0$$
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda z| = \lambda |z|$$
$$|z|^2 = z\overline{z}$$
$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1\overline{z_2})$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

3.2 Propriétés de l'argument

$$\arg(z_1 z_2) = (\arg(z_1) + \arg(z_2)) \ [2\pi]$$
$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = (\arg(z_1) - \arg(z_2)) \ [2\pi]$$
$$\arg(-z) = (\arg(z) + \pi) \ [2\pi]$$
$$\arg(z^n) = n\arg(z) \ [2\pi]$$

3.3 Propriétés du conjugué

Soit $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$, alors on a :

$$\overline{z} = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = re^{-i\theta}$$

De cela, on peut déduire que $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$. De même, on aura $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$.

3.4 Résolution d'équations du second degré

Soit l'équation de la forme $ax^2 + b^x + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on utilise la formule de Cardan :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Trois cas sont alors possibles en fonction du signe de Δ : deux cas qui se résolvent dans le domaines réel, et un qui se résout dans le plan complexe.

$$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ , \ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \ , \ x_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

4 Exercices

4.1 Calculer

Soient $z_1 = 5 - 6i$ et $z_2 = 3 - 4i$; calculer :
- $z_1 + z_2$
- $z_1 . z_2$
- $\overline{z_1 + z_2}$
- $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$

4.2 Montrer que

Montrer que $\frac{1+2i}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

4.3 Forme algébrique

Mettre sous forme algébrique :
- $\frac{1+2i}{1-i}$
- $\frac{3+2i}{1+i\sqrt{3}}$

4.4 Conjugué

Calculer le conjugué de $(4 - i)(7 + 6i)$ de deux façons différentes.

4.5 Résoudre

Résoudre :
— $2x^2 + 3^x + 4 = 0$
— $5x^2 + 3^x - 5 = 0$

4.6 Transformation

Donner :
— $z = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$ sous forme algébrique
— $z = 3 + 3i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle
— $z = 2\sqrt{3} - 2i$ sous forme exponentielle
— $z = 12e^{-i\frac{12\pi}{5}}$ sous forme algébrique