Thibault Liétard
2023-2024
IS3

Chapitre 2 : Trigonométrie
Cours de Remédiation Mathématiques

---

1 Introduction

La trigonométrie est la branche des mathématiques qui traite des relations entre les distances et les angles dans un triangle rectangle. C'est une des branches les plus anciennes des mathématiques, développée dès le 4ème millénaire avant JC pour ses applications évidentes à l'architecture.

2 Cercle trigonométrique

On définit un cercle centrée sur l'origine et de rayon 1. Cela donne deux avantages : son périmètre vaut 2π, et les hypoténuses des triangles que l'on va considérer valent toujours 1. Voici le cercle ainsi définit sur la figure 1.

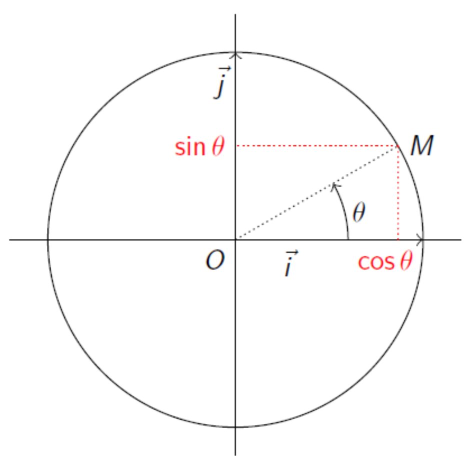

FIGURE 1 – Cercle unité

Pour chaque point M de ce cercle, le segment OM forme un angle θ avec l'axe des abscisses. Pour cette angle, on va définir :
— le projeté de M sur l'axe des abscisses, qu'on appelle son *cosinus*
— le projeté de M sur l'axe des ordonnées, qu'on appelle son *sinus*.

Le cercle étant de périmètre 2π, on va exprimer les angles en *radians*, c'est à dire en distance parcouru sur le cercle unité. Ainsi, un angle de π correspond à un angle de 180, $\pi/2$ correspond à 90, etc...

À noter que sur un cercle ainsi définit, un angle de 2π correspond à un angle de 0. Tous les angles seront donc exprimés $[2\pi]$, "modulo 2π".

3 Cosinus, sinus, tangente

Dans n'importe quel triangle rectangle, on peut définir, un cosinus, un sinus, et une tangente pour un angle. Prenons les repères tels que définit sur la figure 2.

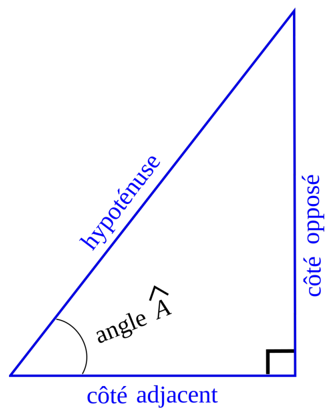

Figure 2 – Angles dans un triangles rectangle

On définit les fonctions de la façon suivante :

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\hat{A}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\hat{A}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Il est important de noter que ces définitions ne sont valables que dans un triangle rectangle ; il n'est pas possible de les utiliser dans d'autres contextes.

On comprend également l'intérêt d'utiliser le cercle unité pour la trigonométrie : l'hypoténuse valant 1, cela simplifie grandement les formules ci-dessus.

De façon plus général, on peut également définir la tangente à partir du cosinus et du sinus :

$$\tan(\hat{A}) = \frac{\sin(\hat{A})}{\cos(\hat{A})}$$

4 Valeurs et formules à connaître

Voici un tableau reprenant les valeurs à connaître pour les angles les plus courant en trigonométrie et en géométrie :

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
π	-1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Voici ensuite quelques formules nécessaires pour pouvoir trouver d'autres angles à partir de ceux ci :
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$

On peut de même donner quelques propriétés de symétrie sur le calcul de ces fonctions :
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Enfin, on peut donner quelques propriétés pour le calcul :
- $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$
- $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

5 Opérations

5.1 Additions

Nous donnons ici des formules utiles pour calculer le cosinus, le sinus ou la tangente de la somme de deux angles (ou de la différence).
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$

5.2 Duplication

Il est parfois nécessaire de calculer le double ou la moitié d'un angle connu ; voici quelques formules :

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

5.3 Linéarisation

Donnons maintenant le lien entre le double d'un angle et son carré :

- $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$
- $\tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

5.4 Produits et sommes

- $\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$
- $\sin a \sin b = \frac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{2}$
- $\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$
- $\cos a \sin b = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$

6 Exercices

6.1 Donner

Donner les valeurs de :

$\cos \frac{\pi}{8}$ $\quad \cos \frac{\pi}{16}$ $\quad \cos \frac{3\pi}{4}$ $\quad \sin \frac{-33\pi}{2}$ $\quad \tan \frac{27\pi}{4}$

$\cos \frac{-5\pi}{6}$ $\quad \sin \frac{\pi}{16}$ $\quad \sin \frac{-3\pi}{4}$ $\quad \cos \frac{13\pi}{2}$ $\quad \sin \frac{25\pi}{3}$

6.2 Cabanon

On souhaite construire un abri de jardin. Le toit est une pente simple de l'arrière à l'avant du cabanon qui doit avoir un angle de 30°. La profondeur du cabanon (distance entre le mur arrière et le mur avant) est de 3m. Le mur avant fait 2.2m de haut. Quelle est la hauteur du mur arrière ?

6.3 Fortifications

On souhaite mesurer la hauteur d'une tour. Placé à une certaine distance de celle ci, un laser placé au sol et pointé vers le sommet de la tour forme un angle de 42° avec le sol. Si on recule de 10m, cet angle est de 27°.

En déduire la hauteur de la tour.