Thibault Liétard
2023-2024
IS3

Chapitre 3 : Logique mathématique
Cours de Remédiation Mathématiques

---

1 Introduction

L'algèbre de Boole, aussi appelé logique booléenne ou calcul booléen, est la partie des mathématiques qui s'intéresse à une approche algébrique de la logique, vue en termes de variables, d'opérateurs et de fonctions sur les variables logiques, ce qui permet d'utiliser des techniques algébriques pour traiter les expressions à deux valeurs du calcul des propositions. Elle fut lancée en 1854 par le mathématicien britannique George Boole. L'algèbre de Boole trouve de nombreuses applications en informatique et dans la conception des circuits électroniques.

2 Principes fondamentaux

2.1 Proposition

Une proposition est un énoncé auquel on attribue l'une des deux valeurs logiques : vrai ou faux. On peut aussi appeler cela une assertion.

Par exemple, la proposition "2+2=4" est une proposition vraie. La proposition "2+2=5" est fausse, mais cela reste une proposition correctement formulée.

2.2 Opérateur

Un opérateur correspond à une opération qui permet de modifier la valeur logique d'une proposition, éventuellement en la conjuguant avec une autre. On va parler ici des 4 opérateurs principaux : *not*, *and*, *or*, et *xor*.

2.2.1 Not

L'opérateur *not* (ou *non* en français) sert à prendre l'inverse d'une proposition, c'est à dire sa négation. Si la proposition A vaut vrai, $\overline{A}$ vaut faux. On l'exprime par la table de vérité suivante :

A	$\overline{A}$
V	F
F	V

Table 1 – Opérateur *not*

2.2.2 And

L'opérateur *and* (ou *et* en français) sert à faire la conjonction de deux propositions, c'est à dire que l'opération vaut vrai que si les deux propositions sont vraies. Pour deux propositions A et B, on note $A \wedge B$:

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table 2 – Opérateur *and*

2.2.3 Or

L'opérateur *Or* (ou *ou* en français) sert à faire la disjonction de deux propositions, c'est à dire que l'opération vaut vrai que si une des deux propositions au moins vaut vrai. Pour deux propositions A et B, on note $A \vee B$:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table 3 – Opérateur *or*

2.2.4 Xor

L'opérateur *xor* (ou *ou exclusif* en français) sert à faire la disjonction exclusive de deux propositions, c'est à dire que l'opération vaut vrai que si une des deux propositions vaut vrai, mais pas les deux. Pour deux propositions A et B, on note $A \ xor \ B$:

Il est utile de noter que l'opérateur *xor* s'obtient à partir des trois précédent avec la formule $(A \vee B) \wedge \overline{(A \wedge B)}$.

A	B	A xor B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLE 4 – Opérateur *xor*

2.3 Axiomes

Les axiomes de la logique booléenne sont trois principes qui sont admis comme vrais et qui s'appliquent à toute proposition. Ils s'énoncent comme suit :

— **principe d'identité :** une proposition P est P : autrement dit, si P est vraie, alors P est vraie (et réciproquement).

— **principe de non contradiction :** P ne peut pas être à la fois vraie et fausse.

— **principe du tiers exclus :** P est vraie ou fausse. Rien d'autre.

3 Propriétés usuelles

3.1 Implication

L'implication est un opérateur logique, au même titre que les précédents, mais un peu particulier car il correspond à une opération moins habituelle de la logique.

On dit "A implique B" et on note $A \Rightarrow B$ si, quand A est vraie, B est vraie. Notez que cela ne donne aucune condition sur B quand A est fausse. La table de vérité de l'équivalence est la suivante :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TABLE 5 – Opérateur *implique*

Il est à noter que l'implication $A \Rightarrow B$ se définit aussi par $\overline{A} \vee B$; on montre facilement que cette proposition a la même table de vérité que celle vu en table 5.

3.2 Équivalence

Deux propositions A et B sont équivalentes si elles ont la même table de vérité. On peut aussi montrer que deux propositions sont équivalentes en montrant que $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$. On dit "A équivaut à B" et on note $A \Leftrightarrow B$.

La table de vérité de l'équivalence se retrouve en utilisant les formules de l'implication, mais elle est en fait assez logique : l'équivalence n'est vraie que si les deux propositions ont la même valeur en même temps :

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TABLE 6 – Opérateur *équivalence*

3.3 Loi de Morgan

Les lois de De Morgan sont des identités entre propositions logiques. Elles ont été formulées par le mathématicien britannique Augustus De Morgan. Il y a deux lois de Morgan.

La première donne que la négation de la disjonction de deux propositions est équivalente à la conjonction des négations des deux propositions, ce qui signifie :

$$\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$$

La deuxième donne que la négation de la conjonction de deux propositions est équivalente à la disjonction des négations des deux propositions, ce qui signifie :

$$\overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$$

On montre facilement ces équivalences en montrant que les deux propositions ont la même table de vérité.

4 Raisonnement

Quand il s'agit de raisonner et de démontrer un énoncé mathématique, la logique est un précieux outils. Voici quelques exemples de raisonnement impliquant la logique. Les explications ne sont volontairement pas très formelle, il s'agit avant tout de donner le sens et l'intuition du fonctionnement de ces raisonnements.

4.1 Contre-exemple

Un contre-exemple est un exemple particulier et concret qui contredit une proposition. Il permet de démontrer que cette proposition est fausse.

En particulier, si on veut démontrer qu'une proposition commençant par $\forall$... est fausse, il suffit en général d'un $\exists$...

4.2 Exemple et généralisation

À l'inverse, si on veut démontrer vraie une proposition qui postule un $\exists$... pour commencer, il suffit en général de trouver un exemple vérifiant la proposition donnée. Démontrer cette proposition fausse est en revanche plus difficile, car il faut alors montrer un $\forall$....

4.3 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde (du latin *reductio ad absurdum*) consiste à démontrer la véracité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition complémentaire (ou « contraire »).

Si on veut démontrer A, on suppose $\overline{A}$ et on montre que cette supposition arrive à une contradiction logique.

5 Exercices

5.1 Traduction

Exprimez en terme de logique les phrases suivantes :
- Il est grand et n'est pas blond
- Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.
- Tous les coureurs ont fini la course

5.2 Raisonnez

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\exists (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / x^2 = y^2 + z^2$$

5.3 Montrez que

Montrer que :

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

5.4 Absurde

En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que :
- n^2 pair $\Rightarrow n$ pair
- $\sqrt{2}$ est irrationnel