Thibault Liétard
2023-2024
IS3

Chapitre 4 : suites numériques
Cours de Remédiation Mathématiques

---

1 Introduction

En mathématiques, une suite numérique est une succession de nombres (entiers, réels, complexes,...). Ces nombres peuvent être liés entre eux par une relation de précédence (un terme de la suite est définit en fonction du/des termes précédents) ou non. Plus formellement, on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est le n^{eme} terme de la suite. De même, on peut définir la fonction suivante, qui définit entièrement une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u : n \to u_n$$

Une suite numérique est une application u d'une partie non vide de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'image $u(n)$ de l'entier n est notée u_n et est appelé terme général de la suite.

2 Suites numériques usuelles

2.1 Suites arithmétiques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé raison de la suite arithmétique.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, alors on définit le terme général par :
- $u_n = u_0 + nr$ si le premier terme est u_0
- $u_n = u_1 + (n-1)r$ si le premier terme est u_1

Plus généralement, $\forall n \in \mathbb{N}$,$\forall p \in \mathbb{N}/p < n$, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si la différence entre deux termes successifs est toujours égale à une constante, c'est à dire si $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = k$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique et soient n, p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Alors on a le résultat suivant :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}$$

Et en particulier, cette formule peut être utilisée pour calculer la suite des premiers entiers :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.2 Suite géométrique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n$. Le réel q est appelé raison de la suite géométrique.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, alors on définit le terme général par :
— $u_n = q^n u_0$ si le premier terme est u_0
— $u_n = q^{n-1} u_1$ si le premier terme est u_1
Plus généralement, $\forall n \in \mathbb{N}$,$\forall p \in \mathbb{N}/p < n$, $u_n = q^{n-p} u_p$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique si le rapport entre deux termes successifs est toujours égale à une constante, c'est à dire si $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$. Cette constante est la raison.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique et soient n, p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Alors on a le résultat suivant :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Et en particulier, cette formule peut être utilisée pour calculer la somme des premières puissances de q :
— $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$
— $n + 1$ si $q = 1$.

2.3 Suites arithmético-géométriques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 (a \neq 0)$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$. On note les cas particuliers suivants :
— Si $b = 0$, la suite est géométrique
— Si $a = 1$, la suite est arithmétique.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, alors l'équation $x = ax + b$ admet une unique solution α appelée point fixe de la suite, et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

2.4 Suites avec récurrence linéaire d'ordre 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2 s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 (b \neq 0)$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

3 Généralités

3.1 Mode de définition

- Par le terme général $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$. Les propriétés de f permettent d'étudier la suite.
- Par le terme général $u_n = f(n)$ mais où f n'est pas une fonction de $\mathbb{R}$ (exemple : factorielle, séries,...)
- Par définition implicite de la suite, par exemple en donnant une équation dont elle est solution.
- En donnant le procédé de calcul du terme suivant en fonction du précédent : $u_{n+1} = f(u_n)$.

3.2 Sens de variation

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire si et seulement si $\exists p \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n > p, u_n = u_p$

Si f est une fonction monotone définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, alors la suite définie par $u_n = f(n)$ a le même sens de variation que f.

3.3 Majoration et minoration

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$
- une suite est bornée si elle est majorée et minorée

Toute suite croissante est minorée par son premier terme ; toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

3.4 Opérations

- La somme de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Le produit d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un réel λ est la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Le produit de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- le quotient de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$

4 Convergence et divergence

La limite d'une suite n'a de sens que lorsque n tend vers $+\infty$.

4.1 Suites convergentes

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $\exists l \in \mathbb{R} / \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \epsilon$

Cela signifie qu'à partir d'un certain rang, toutes les valeurs de la suite se trouvent en dessous d'une distance ϵ de l.

Réciproquement, si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la différence entre deux termes consécutifs tend vers 0. En conséquence, si on peut montrer que la différence entre deux termes consécutifs n'a pas pour limite 0, alors on a montré que la suite n'est pas convergente.

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, le réel l tel que définit ci-dessus est unique est il est appelé limite de la suite. On note $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Voici quelques propriétés qu'il est utile de noter sur les suites convergentes :
- si $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0, u_n \geq 0$, alors $l \geq 0$
- si $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n < n_0, u_n \geq 0$, alors $l \leq 0$
- si $\exists n_0, a, b \in \mathbb{N}^3 / \forall n > n_0, a \leq u_n \leq b$, alors $a \leq l \leq b$

Les réciproques sont vraies également : si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \geq 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0, u_n \geq 0$, etc...

Toute suite convergente est bornée. Si une suite n'est pas bornée, elle n'est pas convergente.

4.2 Suites divergentes

Une suite est dite divergente si elle n'est pas convergente. Il existe deux sortes de suites divergentes : celles qui tendent vers l'infini et celles qui n'ont pas de limite.

5 Exercices

5.1 Exprimer

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_{n+1} = 3u_n - 4$ et $u_0 = 1$. Exprimer u_n en fonction de n.

Résolution :
- déterminer $\alpha = a\alpha + b$
- poser $v_n = u_n - \alpha$ et en déduire v_n en fonction de n
- déduire u_n en fonction de n

5.2 Bornes

Donner des bornes pour les suites $u_n = \frac{n}{n+1}$, $v_n = e^{-n}$, et $w_n = \ln(x^2 + 1)$.

5.3 Nombre de termes

$S = 17 + \ldots + 101$ est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, on admet que $S = 1711$. Quel est le nombre de termes de cette suite ?

5.4 Physics

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 20% de son intensité lumineuse, exprimée en candela (cd). On utilise une lampe torche qui émet un rayon d'intensité lumineuse réglée à 400 cd.

On superpose n plaques de verres identiques (n étant un entier naturel) et on désire mesurer l'intensité lumineuse I du rayon à la sortie de la n-ième plaque. On note $I_0 = 400$ l'intensité lumineuse du rayon émis par la lampe torche avant de traverser les plaques (intensité lumineuse initiale).

Étudier la variation de l'intensité lumineuse au fur et à mesure que le rayon traverse les différentes plaques.