Thibault Liétard
2023-2024
IS3

Chapitre 5 : Étude de fonctions
Cours de Remédiation Mathématiques

---

1 Limites

La limite d'une fonction est la "valeur" qu'elle atteint quand sa variable tend vers une valeur donnée. On met ici le mot "valeur" entre guillemets car il ne s'agit pas forcément d'une valeur réelle. Cela peut aussi être un infini, positif ou négatif.

1.1 Limite en $+\infty$

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[\alpha; +\infty[$ de $\mathbb{R}$. Plusieurs cas sont possibles pour la limite de f en $+\infty$, qu'on note $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

— Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, c'est à dire si la limite de f est un réel, cela peut vouloir dire deux choses :
  — Soit la fonction f oscille autour de la valeur l et s'en rapproche de plus en plus : $\forall\epsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}/\forall x > x_0, l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$.
  — Soit la fonction f s'approche de la valeur l de façon asymptotique, c'est à dire sans jamais l'atteindre : $\forall\epsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}/\forall x > x_0, l < f(x) < l + \epsilon$ (ou inversement).

— Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (réciproquement $-\infty$), c'est à dire si la limite de f est infini, cela veut dire que la fonction continue de croître (réciproquement de décroître) quand x augmente.

Pour ce dernier cas, il est utile de mentionner le cas particulier ou la fonction suit une droite affine comme asymptote. $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2/ \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$.

1.2 Limite en α

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $\alpha \in I$ un réel. Plusieurs cas sont possibles pour la limite de f en α, qu'on note $\lim_{x\to\alpha} f(x)$.

— Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$, cela veut simplement dire que f est définie en α et que $f(\alpha) = l$.

— Si $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty$, c'est à dire si la limite de $f(x)$ quand x tend vers α par valeurs supérieurs est $+\infty$, cela veut dire que f présente une discontinuité en α.

1.3 Comparaisons de limites

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$. On a les résultats suivantes sur les limites de f et g quand on compare les deux fonctions :

— Si $\forall x, f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ et $\lim_{x\to+\alpha} g(x) = l'$, alors $l < l'$.

— Si $\forall x, f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

— Si $\forall x, f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$.

Notez que ces comparaisons sont aussi valable sur α vaut un infini, positif ou négatif.

On donne aussi le **théorème des gendarmes** : soient trois fonctions de $\mathbb{R}$ notées $f(x), g(x)$ et $h(x)$ telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Si $\lim_{x\to\alpha} h(x) = l$ et $\lim_{x\to\alpha} g(x) = l$, alors $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$

De même, ce théorème est aussi valable si $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$.

1.4 Limites et opérations

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$. On donne le tableau suivant sur les limites des opérations entre f et g :

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim_{x\to\alpha} f(x) + g(x)$	$\lim_{x\to\alpha} f(x) * g(x)$	$\lim_{x\to\alpha} f(x)/g(x)$
$l \in \mathbb{R}$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$l + l'$	$l * l'$	l/l'
$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0
$+\infty$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ND
$-\infty$	$+\infty$	ND	$-\infty$	ND
$+\infty$	0	$+\infty$	ND	ND

Table 1 – Opérations sur les limites

De même, si une fonction g a pour limite $\beta \in \mathbb{R}$ en α, et si une fonction f a pour limite l en β, alors $\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = l$.

1.5 Limite de polynômes

Soit un polynôme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, alors la limite de ce polynôme en $+\infty$ est la même que celle de $a_n x^n$.

$$\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$$

Soit un deuxième polynôme $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$, alors on a aussi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Ces équations sont également vraies quand $x \to -\infty$

1.6 Continuité

Soit une fonction f définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$ et soit un réel $a \in I$, f est continue en a si $\exists l \in \mathbb{R} / \lim_{x \to a} f(x) = l$.

On dira que f est continue sur I sur f est continue en tout point de I.

2 Dérivation

2.1 Définition

Soit une fonction f définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$ et soit un réel $a \in I$, f est dérivable en a si $\exists l \in \mathbb{R} / \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.

On note $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et on dit que $f'(x)$ est la valeur de la dérivée de f en x. Cette valeur est également le coefficient directeur de la tangente à la courbe en a.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Si f est dérivable en un point, alors elle est forcément continue en ce point.

2.2 Dérivée de fonction usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$

Table 2 – Dérivées usuelles

2.3 Règles de dérivation

Soient deux fonctions u et v de I, dérivables sur cet intervalle. On donne les règles suivantes pour le calcul des dérivées :

$f(x)$	$f'(x)$
$u + v$	$u' + v'$
(uv)	$u'v + uv'$
$(ku)'$	$k(u')$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$1\frac{u'v-v'u}{v^2}$
$v(u())$	$u'v'(u())$

Table 3 – Règles de dérivation

2.4 Sens de variation

Soit f une fonction de $I \subseteq \mathbb{R}$ dérivable sur I et f' sa dérivée. On donne les résultats suivants :

- Si $f'(x) > 0 \forall x \in I$, f est strictement croissante sur I
- Si $f'(x) < 0 \forall x \in I$, f est strictement décroissante sur I
- Si $f'(x) = 0 \forall x \in I$, f est constante sur I.

3 Exercices

3.1 Limite et asymptote

Donner la limite de $f(x) = \frac{x^2+4x+2}{2x}$ en $+\infty$; pouvez vous donner une asymptote ?

3.2 Hypothèses

On donne plusieurs hypothèses sur f ; pouvez vous conclure à sa limite comme demandée ?

- $f(x) \geq x^2 - 1/x$, limite en $+\infty$
- $f(x) \leq x^4 + x^2$, limite en 0
- $f(x) \leq 2x$, limite en $-\infty$
- $f(x) \geq 1 + 1/(x-1)$, limite en $1+$
- $|f(x) + 2| \leq g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, limite en $+\infty$

3.3 Calcul

Calculer les dérivées des fonctions suivantes en n'oubliant pas de préciser leur ensemble de définition à chaque fois :

- $f(x) = 3x^2 - 4x - \frac{1}{x}$
- $g(x) = (2x+1)\cos(x)$
- $h(x) = \frac{x^2+3x-5}{3x+7}$
- $i(x) = \sin(\pi x^3)$
- $j(x) = \sqrt{2 + \cos(x)}$
- $k(x) = (3x-5)^4$
- $t(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$