Thibault Liétard
2023-2024
IS3

Chapitre 6 : Exponentielle et logarithme
Cours de Remédiation Mathématiques

---

1 Fonction exponentielle

1.1 Définition

En mathématiques, la fonction exponentielle est la fonction notée exp qui est égale à sa propre dérivée et prend la valeur 1 en 0. Elle est donc la solution du système :

$$f(x) = f'(x)$$

$$f(0) = 1$$

Elle est la seule fonction dérivable de $\mathbb{R}$ à vérifier ces propriétés. La fonction exponentielle est donc une fonction de $\mathbb{R}$ qui à toute valeur x associe e^x, où e est appelée nombre d'Euler ou constante de Néper (en référence aux mathématiciens Leonhard Euler et John Napierc) et vaut environ 2,71828. Par définition, exponentielle est donc une fonction strictement positive.

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \longrightarrow \exp(x) = e^x$$

1.2 Propriétés

Pour commencer et comme dit précédemment, exponentielle est une fonction strictement positive : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$. Ensuite, exp étant définit comme la puissance d'un nombre réel, elle en conserve les propriétés. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

— $e^{x+y} = e^x e^y$
— $e^{x-y} = e^x / e^y$
— $e^{nx} = (e^x)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

1.3 Limites et variations

La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$. Par conséquent, on a aussi pour toute fonction u de $\mathbb{R}$, $(e^{u(x)})' = u'(x)e^x$.

La fonction exp est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Cela veut dire que, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$. Et puisque la fonction est strictement croissante, on a de même : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

Pour finir, voici les limites de la fonction exponentielle et de quelques unes de ses composées usuelles :
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x/x^n = +\infty, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$

2 Logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Concrètement, cela se traduit par :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y, \ / \exp(y) = x$$

En conséquence, on a : si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $\ln(x) = y \Leftrightarrow \exp(y) = x$.

Par définition, on a également $\ln(e) = 1$, $\ln(1) = 0$, $\ln(e^x) = x \forall x \in \mathbb{R}$, et réciproquement $e^{\ln(x)} = x \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

2.1 Propriétés

Comme on a définit des propriétés sur exp, il est possible d'en déduire certaines sur ln. La plupart se démontrent d'ailleurs en utilisant les propriétés sur exponentielle.

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(1/x) = -\ln(x)$
- $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x), \ \forall n \in \mathbb{N}$

2.2 Dérivée, limites et variations

La fonction ln a pour dérivée la fonction inverse : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln'(x) = \frac{1}{x}$. De même, si u est une fonction dérivable strictement positive sur un intervalle I, alors la composée de ln et de u est dérivable sur I : $\ln(u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

La fonction ln étant la réciproque de exp, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Les courbes de exp et ln sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

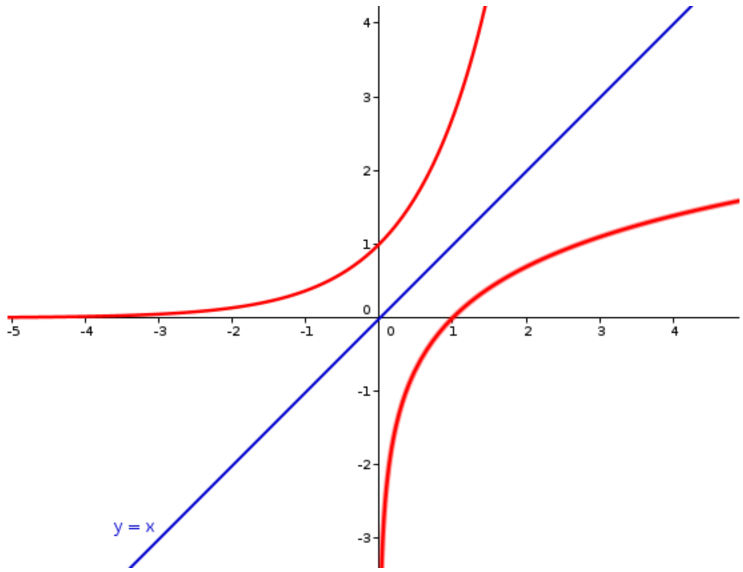

Figure 1 – Exponentielle et Logarithme

La fonction ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Cela veut dire que, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$. Et puisque la fonction est strictement croissante, on a de même : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

Pour terminer, voici les limites de la fonction ln et de ses composées usuelles :
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x)/x^n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)/x = 1$

3 Exercices

3.1 Simplifier

Écrire de façon plus simple les expressions
- $(e^x)^{-7}(e^{-2x})^3$
- $(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2$

3.2 Suites

Montrer que $u_n = e^{2n-1}$ est une suite géométrique.

3.3 Limites

Calculer les limites des fonctions suivantes :
- $\lim_{x\to+\infty}(e^{-x} - x)$
- $\lim_{x\to-\infty}(e^{-x} - x)$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{(e^x-5)}{e^{2x}+2}$
- $\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - 5x)e^x$
- $\lim_{x\to-1} \frac{(e^{x+1}-1)}{x+1}$

3.4 Déterminer

Déterminer les domaines de définitions des deux fonctions $f(x) = \ln((x-7)(x+4))$ et $g(x) = \ln(x-7) + \ln(x+4)$.

3.5 Résoudre

Résoidre les équations suivantes :
- $e^x = 4$
- $e^{2x} - 5e^x = 0$
- $\ln(x) = 7$
- $\ln^2(x) - 7\ln(x) = 0$

3.6 Réécrire

Réécrire $\ln(72)$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

3.7 Dérivation

Calculer les dérivée des fonctions suivantes :
- $f(x) = x\ln(x) - x$
- $g(x) = \ln(3x+1)$
- $h(x) = \ln(\sqrt{7-4x})$
- $k(x) = \ln(\frac{e^x-1}{e^x+1})$