Thibault Liétard
2023-2024
IS3

Chapitre 7 : L'intégrale de Riemann
Cours de Remédiation Mathématiques

---

1 Définition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a; b]$. La quantité $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de f.

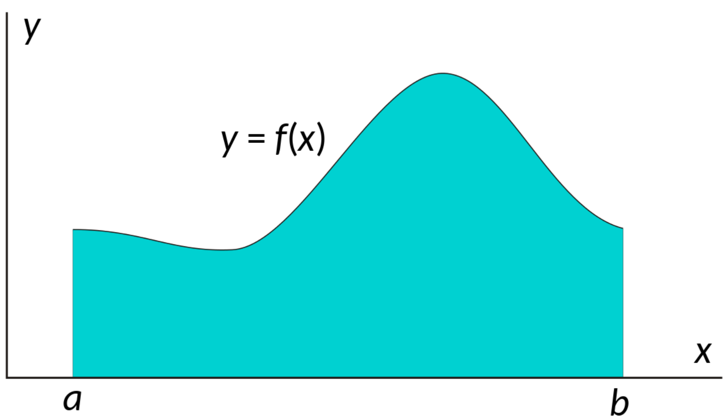

Figure 1 – Aire sous la courbe de f sur $[a; b]$

Pour donner un sens rigoureux à cette notation, Riemann a introduit les "séries de Riemann", définit comme suit.

Une subdivision Δ de l'intervalle fermé $[a; b]$ est un ensemble fini de réels $x_0, x_1, ...x_n$ tels que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. On appelle pas de la subdivision la valeur h définie par $h(\Delta) = \max_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)$.

Soient f une fonction définie sur $[a; b]$ et $\Delta = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a; b]$. Pour tout $i = 1, ..., n$ on choisit $\epsilon_i \in [x_{i-1}; x_i]$. La somme $S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\epsilon_i)$ est appelé somme de Riemann de f associée à Δ.

Cette somme représente une approximation de l'aire sous la courbe de f par la somme des aires des rectangles formés par la subdivision Δ et les ϵ_i.

En utilisant ces définitions, on dira que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ si la limite suivante existe :

$$\lim_{h(\Delta)\to 0} S(f,\Delta)$$

L'idée est que quand le pas devient très petit, les rectangles sont une partie infinitésimale de l'intervalle, un "dx". C'est ce que signifie le "dx" dans l'intégrale : qu'à la limite, on considère des divisions très fines de l'intervalle.

$$h(\Delta) \to 0 \Rightarrow S(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\epsilon_i) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$$

Toute fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$.

2 Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions intégrables sur les intervalles considérés. On donne les propriétés suivantes :

— Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ deux réels, $\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$. C'est la propriété de linéarité.

— Si $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a;b]$, alors on a $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. Cela vaut en particulier si $f(x) \geq 0$.

— On donne une propriété simple sur la valeur absolue de f et celle de son intégrale : $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

On donne également la relation de Chasles : soient $a < b < c$ trois réels, on a le résultat suivant pour toute fonction f intégrable sur $[a;c]$:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Avec les conventions $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, la relation de Chasles reste vraie quelque soit l'ordre des réels a, b et c.

Enfin, on donne que si f est continue sur $[a;b]$ et que $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, alors $f(x) = 0$, $\forall x \in [a;b]$.

3 Calcul de primitives

Théorème fondamentale de l'analyse : Soit F une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Notons f sa dérivée. Alors f est intégrable et on a :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Rappelons que deux primitives F et G d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante ; donc $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, aussi la formule précédente ne dépend pas de la primitive choisie.

Cette formule donne une première façon de calculer les intégrales, à partir d'une primitive de la fonction à intégrer. Voici un tableau récapitulatif des primitives classiques :

$f(x)$	$F(x)$
$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x-b}$	$\ln(x-b)$
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$
$\cos(\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)$
$\sin(\lambda x)$	$\frac{-1}{\lambda}\cos(\lambda x)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

TABLE 1 – Primitives usuelles

Rappelons enfin quelques règles pour l'intégration de combinaisons d'une fonction u et de sa dérivée u' :

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$nu'(x)u(x)^{n-1}$	$u(x)^n$

TABLE 2 – Primitives usuelles de composées

4 Méthodes d'intégrations

4.1 Intégration par parties

Soient deux fonctions u et v continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$. On a l'égalité suivante :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)$$

Cette formule se démontrer à partir de la formule $(uv)' = u'v + v'u$; faire une intégration par partie revient à échanger $\int u'v$ et $\int v'u$ lorsque l'un des deux facteurs a une dérivée plus simple. Par exemple, on pourra utiliser cette formule pour calculer $\int_1^{10} x\ln(x)dx$.

4.2 Changement de variables

Soit une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ comme définie précédemment, et soit $\phi : [\alpha; \beta] \to [a; b]$ une fonction dérivable sur $]\alpha; \beta[$ et telles que $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)d(x) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

En pratique, cela veut dire qu'on effectue les substitutions $x \leftrightarrow \phi(t)$, $d(x) \leftrightarrow \phi'(t)dt$, $a \leftrightarrow \alpha$, et $b \leftrightarrow \beta$.

Le changement de variable est aussi valable si $\phi : [\alpha; \beta] \to [a; b]$ vérifie $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)d(x) = \int_\beta^\alpha f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Donnons un exemple : soit $S = \int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{2x} dx$. On posera $t = \ln(x)$, ce qui amène $x = \phi(t) = e^t$, $e^\pi = \phi(\pi)$, $1 = \phi(0)$ et $dx = e^t dt$. On a donc $S = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{2e^t} e^t dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi sin(t)dt$.

5 Exercices

5.1 Calculer

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (2x-1)^3 dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_0^\pi \sin(3x+1)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5}{\cos^2 x} dx$$

$$\int_0^\pi \sin(x)\cos^2(x)dx$$

5.2 IPP

En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^\pi x\cos(x)dx$ et $\int_1^e x\ln^2(x)dx$.

5.3 Changement

Par changement de variable, calculer $\int_0^2 \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$.