Thibault Liétard
2023-2024
IS3

Chapitre 8 : Intégrales doubles
Cours de Remédiation Mathématiques

---

1 Généralités

1.1 Définition

Nous avons vu l'intégration sur $\mathbb{R}$, qu'en est-il quand on passe dans $\mathbb{R}^2$? Peut-on intégrer une application de $\mathbb{R}^2$ de sorte à obtenir le volume entre la surface de son graphe et le plan ?

Considérons D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue (on se place donc dans l'espace). On veut définir une quantité noté $\int\int_D f(x,y)dxdy$ représentant le volume compris entre le graphe de f et le plan formé par D.

On procède en fait comme pour l'intégrale en dimension 1, c'est à dire par approximation : l'intégrale double $\int\int_D f(x,y)dxdy$ est la limite de ma somme des volumes des rectangles (des prismes en l'occurrence) infinitésimaux ; encore faut-il que cette limite existe !

On donne le résultat suivant : lorsque le domaine D est raisonnable et la fonction f continue, alors cette limite existe !

1.2 Propriétés

La construction d'une intégrale double étant similaire à celle de l'intégrale simple, elle possède les mêmes propriétés :
- linéarité
- monotonie
- valeur absolue de l'intégral inférieure à l'intégrale de la valeur absolue
- relation de Chasles

1.3 Théorème de Fubini

Le théorème de Fubini permet de ramener le calcul d'une intégrale double au double calcul d'une intégrale simple. Il est même parfois possible d'avoir le choix entre l'ordre d'intégration des variables.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble dont on peut délimiter la frontière horizontalement par des fonctions continues, c'est à dire tel qu'il existe α, β deux fonctions continues réelles telles que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a < x < b, \alpha(x) < y < \beta(x)\}$, et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b [\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy]\ dx$$

Si $D2$ peut être délimité verticalement par des fonctions continues, c'est à dire tel qu'il existe γ, δ deux fonctions continues réelles telles que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c < y < d, \gamma(y) < x < \delta(y)\}$, alors :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d [\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx]\ dy$$

On notera le cas particulier d'une fonction $f(x, y) = g(x)h(y)$ et $D =]a; b[\times]c; d[$, où on a $\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy$.

Donnons un exemple : on donne $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \frac{\pi}{2}\}$, c'est à dire qu'on s'intéresse à la surface formée par le triangle $((0; 0), (0; \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}; 0))$. On veut calculer $\int\int_D \cos(x + y)dxdy$. D est délimité horizontalement car $y = \frac{\pi}{2} - x$. On a donc :

$$\begin{aligned}\int\int_D \cos(x+y)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)dy]dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}-x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin(x))dx \\ &= [x+\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

2 Changement de variables

2.1 Calcul des dérivée partielles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x si la limite suivante existe :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t}$$

Réciproquement, on dira que f admet une dérivée partielle par rapport à x si la limite suivante existe :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t}$$

Vérifier que ces limites existent peut être très complexe, mais le calcul des dérivées partielles est en général très simple : il suffit de dériver en fonction d'une variable, en considérant l'autre comme une constante. Nous considérerons comme admis que ces limites existes pour les fonctions que nous rencontrerons.

2.2 Jacobien

On considère maintenant $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application à deux dimensions et nous notons ϕ_1 et ϕ_2 ses applications coordonnées, c'est à dire que $\phi(x,y) = (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y))$.

La matrice jacobienne de ϕ en (x,y) est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Son déterminant est appelé le Jacobien, il est noté $J_\phi(x,y) = (\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\frac{\partial \phi_2}{\partial x})(x,y)$.

2.3 Changement de variables

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $D \subset \mathbb{R}$ borné. Soit $\phi : \Delta \to D$ une bijection qui admet des dérivées partielles. Alors :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(\phi(u,b))|J_\phi(u,v)|dudv$$

2.4 Coordonnées polaires

La formule précédente s'applique en particulier au changement de variable pour passer en coordonnées polaires. Soit l'application ϕ définie comme suit :

$$\phi : \mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r,\theta) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

L'application ϕ vérifie les conditions nécessaires définie précédemment, on peut calculer son Jacobien.

$$J_\phi(r,\theta) = \det\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{smallmatrix}\right) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Il faut ensuite trouver Δ tel que $\phi(\Delta) = D$, puis on a bien le changement de variable suivant :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f((r\cos\theta, r\sin\theta))r\ drd\theta$$

Donnons un exemple pour terminer : on veut calculer $\int\int_D dxdy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq R\}$. On poste $\Delta = [0;R] \times [0;2\pi[$, en utilisant le ϕ définit précédemment on a bien $\phi(\Delta) = D$. Donc :

$$\int\int_D dxdy = \int_0^R (\int_0^{2\pi} rd\theta)dr = 2\pi\int_0^R rdr = \pi R^2$$