

1 Transition écologique (2pts)

Pour économiser le chauffage dans les locaux d'une école, on souhaite ne chauffer que quelques salles parmi celles présentent dans l'établissement :

salle	A	B	C	D	E	F
capacité	30	60	40	60	50	30

- On souhaite ne chauffer que 2 salles. Quel est le cardinal de l'ensemble Ω des solutions possibles ?
- Même question en considérant qu'on doit pouvoir accueillir au moins 70 personnes.
- Si maintenant on veut pouvoir chauffer 3 salles, mais pas la B et la D en même temps, combien y a-t-il de solutions possibles ?

2 Dénombrabilité mon amour (6pts)

Un nombre algébrique est un nombre réel x tel qu'il existe une famille $(a_i)_{i \leq n}$ de coefficients dans \mathbb{Z} tels que $a_n \neq 0$ et x est solution de l'équation :

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$$

Pour le dire plus simplement, x est un nombre algébrique si on peut trouver une équation de la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ à coefficient dans \mathbb{Z} dont x est solution.

On dit que x est un nombre algébrique de degré n si n est le plus petit entier tel qu'il existe une équation de la forme $(\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0)$ dont x soit solution.

- Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
- Montrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré au plus n est dénombrable
- L'ensemble de tous les nombres algébriques est-il dénombrable ?

3 À la carte (3pts)

On considère un jeu de 52 cartes classique. Donnez les probabilités des situations suivantes, en justifiant toutes vos réponses :

- Piocher 5 cartes et avoir 2 rois ou 3 dames
- Piocher 5 cartes et avoir au moins un as.
- Piocher n cartes et avoir au moins 2 as (en fonction de n)

4 Histoires de voisinage (4pts)

Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événements suivants :

- A="les deux enfants sont de sexes différents"
- B="l'aîné est une fille"
- C="le cadet est un garçon".

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants. On suppose que la probabilité à la naissance d'avoir une fille (respectivement un garçon) est égale à 1/2.

5 Un parmi tous (5pts)

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable et ω un élément de Ω . Soit P l'application :

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0; 1] \\ A \rightarrow 1 \text{ si } \omega \in A, 0 \text{ sinon}$$

Montrez que le triplet (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace de probabilité